Chapitre II : La magnétostatique dans les milieux aimantés

I- Introduction :

Electricité 2 traite l'étude des propriétés magnétiques provoquées par des courants créés par des conducteurs plongés dans le vide (c'est-à-dire en absence de la matière)

En présence d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$, la matière s'aimante et crée donc un champ magnétique qui s'ajoute à $\vec{B}_e$.

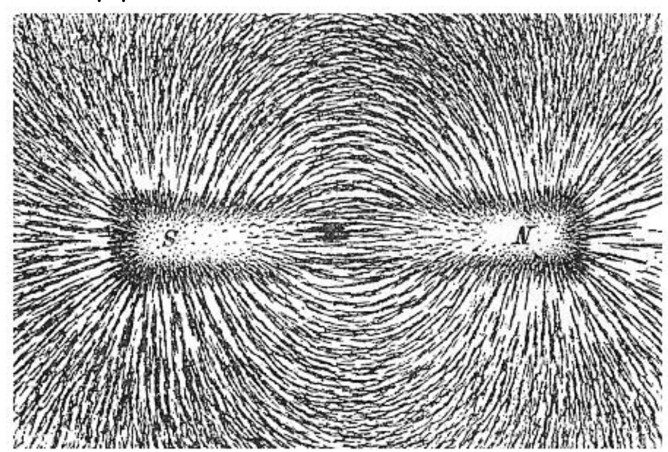
Un milieu aimanté est un milieu dont chaque élément de volume dv se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique $d\vec{m}$.

Il existe des matériaux qui sont aimantés en absence de champ magnétique extérieur. Ces matériaux sont appelés des aimants.

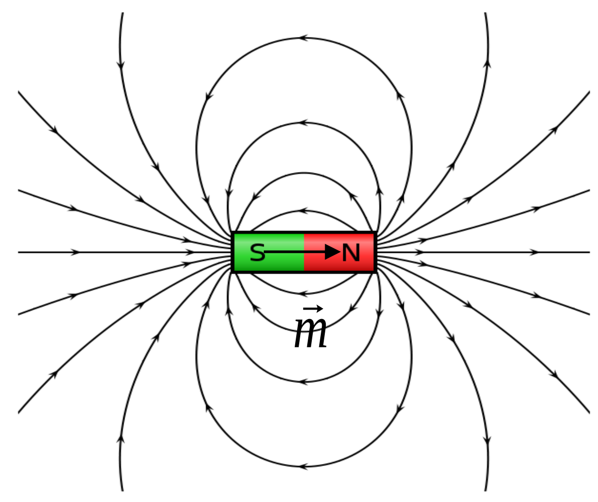
I-1- aimant naturel: oxyde de fer (Fe_3O_4)

Un aimant crée un champ d'induction magnétique sans qu'il y ait une circulation de courant

Les lignes de champ peuvent être mises en évidence avec la limaille de fer.



Les lignes de champ sont analogues à celles créés par un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p}$.



Un aimant est un dipôle magnétique caractérisé par son moment dipolaire magnétique $\vec{m}$.

Un aimant est constitué de deux pôles (Nord-Sud): $\vec{m}$ est orienté S ⟶ N

Lorsqu'on coupe un aimant en plusieurs morceaux, les fragments obtenus sont de nouveaux aimants possédant aussi deux pôles: Il n'existe pas dans la nature de monopole magnétique.

Sous l'effet d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$:

- l'aimant subira un moment de force : $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$
- rotation de l'aimant jusqu'à ce que : $\vec{m} \,//\, \vec{B}_e$

Un aimant de moment magnétique permanent crée donc un champ magnétique qui est dû aux propriétés magnétiques de la matière qui le constitue.

I-2- mise en évidence de la magnétisation de la matière

On considère un solénoïde assez long, composé de N spires de rayon R parcourus par un courant d'intensité I.

Le solénoïde peut être vide ou rempli intérieurement d'un noyau de fer.



Soit B_0 le champ magnétique créé par le solénoïde vide

Soit Φ_0 le flux du champ magnétique à travers le solénoïde vide : $\phi_0 = \iint_S \vec{B}_0 \cdot \overrightarrow{dS}$

Soit B le champ magnétique créé par le solénoïde avec le noyau de fer

Soit Φ le flux du champ magnétique à travers le solénoïde rempli avec un noyau de fer : $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$

On constate que : $\Phi > \Phi_0$. $\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{B}{B_0} > 1$, Le champ magnétique en présence de la matière est supérieur à celui du vide.

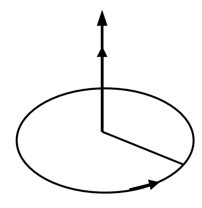
On appelle : $\mu_r = \frac{B}{B_0}$, la perméabilité magnétique relative du matériau.

Un milieu en présence d'un champ extérieur s'aimante.
Dans certaines substances (paramagnétiques ou diamagnétiques) l'aimantation s'annule lorsque le champ extérieur s'annule.
D'autres (ferromagnétiques) garde les propriétés magnétiques même lorsqu'on annule le champ extérieur

I-3- Rappel : dipôle magnétique

a- Définition : un dipôle magnétique est une spire (boucle) (C) de forme quelconque parcourue par un courant d'intensité I. Son moment dipolaire a pour expression : $\vec{m} = I\iint_{(S)} \vec{n} dS$; $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normale à la surface S.

Son sens est déterminé par le sens du courant (C) (règle du tire-bouchon ou règle de tournevis).



Pour une spire de rayon R, le moment dipolaire magnétique est $\vec{m} = I\vec{S}$. La direction de $\vec{m}$ est celle de $\vec{S}$. Son module est : $|\vec{m}| = I\pi R^2$.

$\vec{m}$ est perpendiculaire au plan de la spire et avec le sens du courant il est orienté dans le sens indiqué.

b- Potentiel vecteur crée par un dipôle magnétique :
Soit un circuit fermé (C), filiforme parcouru par un courant permanent d'intensité I. Le point O est une origine choisie arbitrairement au voisinage de (C).
Le potentiel vecteur créé en un point M très éloigné de (C) est donné par :

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

où $\vec{m}$ est le moment magnétique de la boucle et r=OM ;

A comparer avec le potentiel scalaire V créé par un dipôle électrique : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$

c- Le champ magnétique d'un moment dipolaire :
Le champ magnétique est obtenu par la relation de définition $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}$ qui donne ici :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \overrightarrow{rot} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \overrightarrow{rot}(\vec{m} \wedge \vec{r}) + \overrightarrow{grad}(\frac{1}{r^3}) \wedge (\vec{m} \wedge \vec{r}) \right]$$

Or $\overrightarrow{rot}(\vec{m} \wedge \vec{r}) = 2\vec{m}$ ($\vec{m}$ uniforme) et $\overrightarrow{grad}(\frac{1}{r^3}) = -\frac{3\vec{r}}{r^5}$

soit $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{2\vec{m}}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^5} \wedge (\vec{m} \wedge \vec{r}) \right]$

Le double produit vectoriel :
$\vec{r} \wedge (\vec{m} \wedge \vec{r}) = \vec{m} r^2 - (\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}$

Soit $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} \right]$

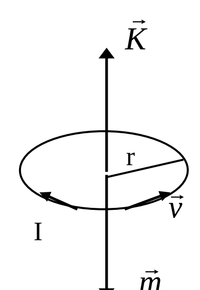
On remarque l'analogie entre le champ magnétique d'un dipôle magnétique et le champ électrique d'une distribution dipolaire.

Ce résultat s'identifie à la formule $\vec{B} = -\overrightarrow{grad}\left[\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\vec{r}\cdot\vec{m}}{r^3}\right] = -\overrightarrow{grad}V^*$

V^* est le potentiel scalaire magnétique

I-4- Moment magnétique d'un atome :

On considère un électron de charge –e qui tourne autour du noyau atomique formant ainsi une spire de courant I ; avec $I = \frac{-e}{T}$ où T est la période de rotation (une charge en mouvement est équivalent à un courant électrique).



L'électron décrit un mouvement circulaire :

$vT = 2\pi r$; donc $T = \frac{2\pi r}{v}$ où v est la vitesse de l'électron et r le rayon de l'orbite. (v=rω où ω est la vitesse angulaire).

Le moment magnétique associé à ce mouvement est :

$|\vec{m}| = IS = I\pi r^2 = \frac{e}{2\pi r}v.\pi r^2 = \frac{evr}{2}$

Si on introduit la masse de l'électron m_e :

$|\vec{m}| = \frac{m_e evr}{2m_e} = (\frac{e}{2m_e})m_e vr$.

Le moment cinétique de l'électron est défini par : $\vec{K} = \vec{r} \wedge m_e\vec{v}$ son module est $|\vec{K}| = m_e vr$ son sens est porté par l'axe $\vec{e}_z$ tel que : $\vec{K} = K\vec{e}_z$.

Donc $|\vec{m}| = \frac{e}{2m_e}|\vec{K}|$

Alors $\vec{m} = (-\frac{e}{2m_e})\vec{K}$; le rapport $(-\frac{e}{2m_e})$ est appelé rapport gyromagnétique.

De plus l'électron possède un moment intrinsèque de spin du fait de sa rotation autour de lui même définie par : $\vec{m}_S = -\frac{e}{m_e}\vec{S}$.

Le moment magnétique totale de l'électron est donné par : $\vec{m} = -\frac{e}{2m_e}(\vec{K} + 2\vec{S})$.

A l'échelle microscopique, le mouvement des électrons dans les atomes et les molécules (que ce soit le mouvement orbital ou le spin) produit des courants qui sont équivalents à de petits dipôles magnétiques.

En absence de champ magnétique, ces dipôles sont orientés aléatoirement (sauf dans le ferromagnétisme)

Une induction externe peut orienter les dipôles, il en résulte une aimantation macroscopique $\vec{M}$.

II. Etude macroscopique de l'aimantation :

II. 1. Le phénomène d'aimantation :

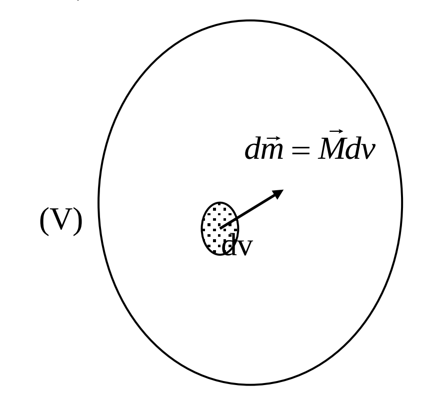
Considérons un volume v d'un matériau placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$. Ce matériau peut contenir des atomes ayant un moment magnétique intrinsèque $\vec{m}_i$ non nul ou nul :

- Pour les atomes qui ont un moment magnétique intrinsèque $\vec{m}_i$ non nul, ces moments s'orientent dans le sens de $\vec{B}_e$.
- Pour les atomes qui ont un moment magnétique intrinsèque nul, les moments magnétiques dus à la rotation des électrons autour du noyau s'orientent dans la direction de $\vec{B}_e$.

Dans tous les cas, l'expérience montre que sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, la matière s'aimante, c'est-à-dire que chaque élément de volume dv du milieu est donc l'équivalent d'un dipôle de moment magnétique $d\vec{m}$.

Le rapport $\frac{d\vec{m}}{dv} = \vec{M}$, qui représente le moment magnétique par unité de volume (densité volumique du moment magnétique), est appelé <u>vecteur aimantation</u>.

$\vec{M}$ est une grandeur locale macroscopique caractérisant l'état d'aimantation de la matière.



$\vec{M}$ s'exprime en A/m.

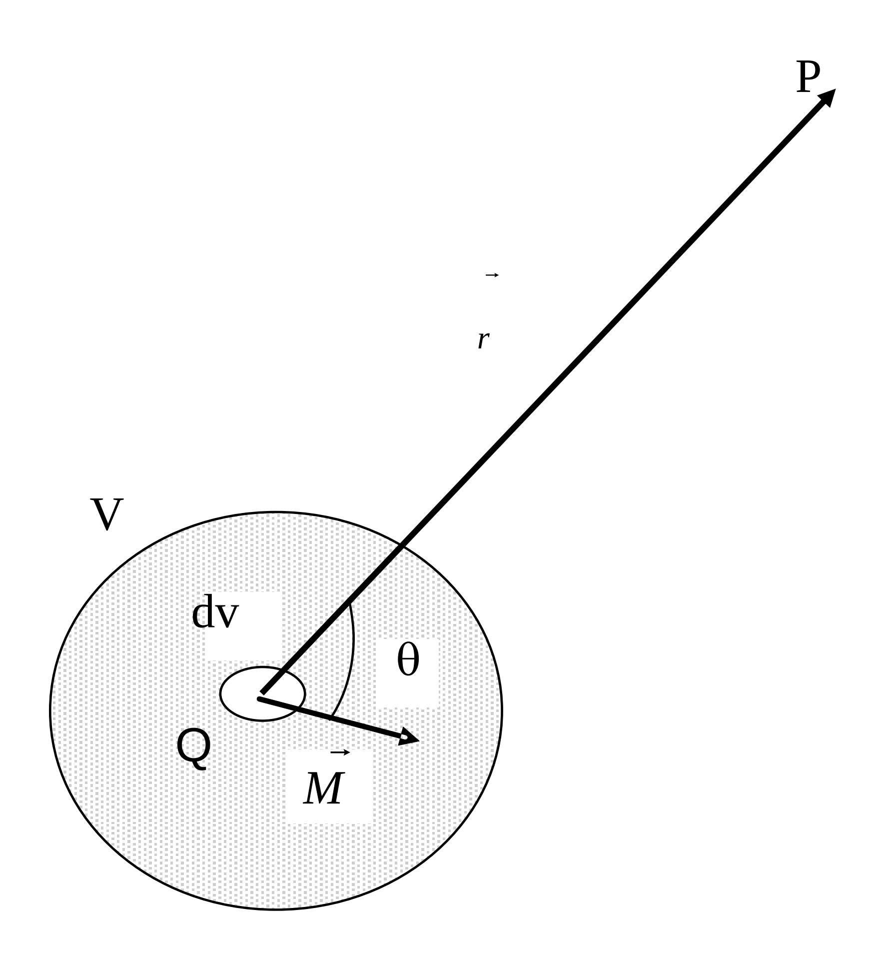
Tout volume élémentaire aimanté peut être ainsi considéré comme un dipôle magnétique, c'est à dire assimilé à une petite spire filiforme.

Cette conception dite des courants particuliers d'Ampère permet de ramener l'étude des milieux aimantés à celle des circuits filiformes.

II. 2. Potentiel vecteur et courants d'aimantation

Considérons un volume V d'un milieu aimanté. Chaque élément de volume dv centré au point Q de la substance magnétique correspond à un moment magnétique $d\overrightarrow{m(Q)} = \vec{M}(Q)\cdot dv$ auquel on peut associer une boucle élémentaire de courant dont le contour (C) infiniment petit est contenu dans dv.

$\vec{M}(Q)$ est le vecteur aimantation par unité de volume au point source Q



Le potentiel vecteur élémentaire $d\vec{A}_m$ créé, en un point P à l'intérieur ou à l'extérieur P du milieu aimanté, par un élément de volume dv du milieu aimanté (boucle élémentaire) est :

$$d\vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0 d\vec{m}(Q)\wedge\vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \vec{M}(Q)\wedge\vec{r}}{4\pi r^3}dv = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{M}(Q)\wedge\overrightarrow{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)dv$$

$$\Rightarrow \vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \vec{M}(Q)\wedge\overrightarrow{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)dv$$

Or :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)=\frac{1}{r}\overrightarrow{rot}\vec{M}+\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\wedge\vec{M}$$

$$\Rightarrow \vec{M}\wedge\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}\overrightarrow{rot}\vec{M}-\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)$$

Donc :

$$\vec{A}_m(P)=-\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)dv+\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \frac{1}{r}\overrightarrow{rot}\vec{M}dv$$

Si $\vec{a}$ est un vecteur quelconque et S la surface limitant le volume V du milieu aimanté, nous avons :

$$\iiint_v \overrightarrow{rot}\vec{a}\cdot dv=-\oiint_S \vec{a}\wedge\overrightarrow{dS}$$

$$-\iiint_v \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)dv=\oiint_S \frac{\vec{M}(Q')}{r}\wedge\vec{n}dS$$

où $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à S orienté vers l'extérieur du volume v.
Q' un point de la surface S.

Alors :

$$\vec{A}_m(P)=\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\vec{M}(Q')\wedge\vec{n}}{r}ds+\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \frac{\overrightarrow{rot}\vec{M}(Q)}{r}dv$$

Soit :

$$\vec{A}_m(P)=\frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\vec{j}_{sm}(Q')}{r}ds+\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \frac{\vec{j}_{vm}(Q)}{r}dv$$

avec : $\vec{j}_{sm}=\vec{M}(Q')\wedge\vec{n}$ et $\vec{j}_{vm}=\overrightarrow{rot}\vec{M}$.

$\vec{A}_m$ est donc le potentiel vecteur créé par des courants en surface de densité $\vec{j}_{sm}$ et en volume de densité $\vec{j}_{vm}$.

$\vec{j}_{sm}$ et $\vec{j}_{vm}$ sont des vecteurs densités de courants fictifs appelées densités de courants d'aimantation.

Remarques :

1- $\vec{j}_{sm}=\vec{M}\wedge\vec{n}$ s'exprime en A/m (c'est le courant par unité de longueur) et $\vec{j}_{vm}=\overrightarrow{rot}\vec{M}$ s'exprime en A/m^2 (il représente le courant par unité de surface, c'est-à-dire la densité de courant d'aimantation à l'intérieur du matériau).

2- Les courants d'aimantation sont introduits ici comme intermédiaires de calcul,

C'est une équivalence formelle et ces courants ne correspondent à aucun mécanisme de conduction électrique

II-3-Champ magnétique créé par les courants d'aimantation

Le champ magnétique $\vec{B}_m$, créé par le milieu aimanté, en un point quelconque P intérieur comme extérieur du milieu est : $\vec{B}_m(P) = \overrightarrow{rot}\vec{A}_m(P)$

$$\vec{B}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oiint_S \frac{\vec{j}_{sm} \wedge \vec{r}}{r^3} ds + \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v \frac{\vec{j}_{vm} \wedge \vec{r}}{r^3} dv$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{QP}$ est le vecteur position

Q centre de l'élément ds ou de l'élément dv

Remarque :

Le champ $\vec{B}_m$ peut être calculé par application du théorème d'Ampère si la symétrie de la distribution des courants d'aimantation le permet.

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}_m(M) = \mu_o \vec{j}_{vm}(M)$$

$\oint_{(C)} \vec{B}_a d\vec{\ell} = \mu_o I_{\substack{aimanté \\ interne à C}}$ forme intégrale du théorème d'Ampère :

Le champ $\vec{B}_m$ est appelé **champ démagnétisant ou champ d'aimantation**

Résumé : le milieu matériel est remplacé par une distribution de courants équivalents $\vec{j}_{ms}(Q)$ et $\vec{j}_{mv}(Q)$.

Une fois les courants $\vec{j}_{mv}(Q)$ et $\vec{j}_{ms}(Q)$ sont connus, on peut calculer le champ magnétique $\vec{B}_m$ créé par les courants d'aimantation.

$\vec{B}_m(M)$ aura donc les propriétés locales : $\overrightarrow{rot}\vec{B}_m(M) = \mu_o \vec{j}_{mv}(M)$

$div\vec{B}_m(M) = 0$ (absence de monopole ou charge magnétique)

II-4 Champ magnétique macroscopique :

En un point M du milieu aimanté, si des courants de conduction existent alors on peut utiliser le théorème de superposition pour calculer le champ magnétique total :

$\vec{B}(M) = \vec{B}_{ext}(M) + \vec{B}_a(M)$ est le champ moyen ou champ macroscopique.

$\vec{B}_{ext}(M)$ est le champ créé par les courants de conduction

$\vec{B}_m(M)$ est le champ créé par les courants d'aimantation

II-5- a Vecteur excitation magnétique

En un point M du milieu aimanté. En plus du courant d'aimantation, le milieu est parcouru par un courant de conduction : $\vec{B}(M) = \vec{B}_{ext}(M) + \vec{B}_m(M)$

La forme locale du théorème d'Ampère en régime statique :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B}(M) = \overrightarrow{rot}(\vec{B}_{ext}(M) + \vec{B}_a(M)) = \overrightarrow{rot}(\vec{B}_{ext}(M)) + \overrightarrow{rot}(\vec{B}_a(M)) = \mu_o \vec{j}(M) + \mu_o \vec{j}_{mv}(M)$$

$\vec{B}(M)$ est le champ magnétique total créé par les courants réels et fictifs.

$$\overrightarrow{rot}\frac{\vec{B}(M)}{\mu_o} = \vec{j}(M) + \vec{j}_{mv}(M) = \vec{j}(M) + \overrightarrow{rot}\vec{M}(M)$$

Soit donc :

$$\overrightarrow{rot}\frac{\vec{B}(M)}{\mu_o} - \overrightarrow{rot}\vec{M}(M) = \vec{j}(M)$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{B}(M)}{\mu_o} - \vec{M}(M)\right) = \vec{j}(M)$$ ($\vec{j}$ est la densité volumique de courants réels)

On pose $\vec{H}(M) = \dfrac{\vec{B}(M)}{\mu_o} - \vec{J}(M)$, $\vec{H}$ est appelé vecteur excitation du champ magnétique, ce qui donne : $\overrightarrow{rot}\vec{H}(M) = \vec{j}(M)$ forme locale du théorème d'Ampère pour $\vec{H}$.

Le théorème d'Ampère pour $\vec{H}$ s'écrit : $\oint_{(C)} \vec{H} d\ell = I_{\substack{libre(de\,condution)\\ inclus}}$

La circulation du vecteur $\vec{H}$ sur un contour fermé (C) est égale à l'intensité qui traverse ce contour (enlacé par ce contour).

$\vec{H}$ s'exprime comme $\vec{M}$ en A/m

Remarque :

$\vec{H}$ a pour source les courants réels **uniquement**, il ne dépend pas de la matière.

$div\vec{H} = -div\vec{M} \neq 0$ ($div\vec{M}$ peut être différent de 0 si $\vec{M}$ est non uniforme).

En effet : $\vec{B} = \mu_o(\vec{H} + \vec{M})$ et $div\vec{B} = 0 = \mu_o(div\vec{H} + div\vec{M}) \Rightarrow div\vec{H} = -div\vec{M}$

Dans le vide, hors du milieu aimanté, on a : $\vec{M} = 0$, $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_o}$

II-5-b. Cas des milieux magnétiques parfaits LHI :

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI), le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ et lié au vecteur champ magnétique $\vec{B}$ par une relation linéaire de la forme :

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

où μ est une constante appelée perméabilité magnétique du milieu.

Or :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Donc :

$$\mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

où $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ est la perméabilité magnétique relative (du milieu par rapport au vide elle est sans dimension)

et $\chi_m = (\mu_r - 1)$ est la susceptibilité magnétique du milieu (constante sans dimension).

Dans un milieu LHI de perméabilité magnétique μ :

$$div\vec{B} = 0 \Rightarrow div\vec{H} = div\left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{div\vec{B}}{\mu} = 0 \Rightarrow div\vec{H} = 0$$

et $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\mu \vec{H}) = \mu \overrightarrow{rot}\vec{H} = \mu \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu \vec{j}$

selon les valeurs de χ_m, le milieu est dit diamagnétique si χ_m est négative et paramagnétique si χ_m est positive.

Si $\chi_m = 0$, le milieu est non magnétique

Si $\chi_m >> 1$, le milieu est ferromagnétique

Dans le cas des substances dia- ou paramagnétiques $|\chi_m|$ est toujours faible devant 1 ; $|\chi_m| << 1$, on peut prendre alors $\mu \cong \mu_o$ ($\mu_r = \chi_m + 1$ est très proche de l'unité) et par suite :

$\vec{B}(M) = \mu_o \vec{H}(M)$, d'où $\vec{M}(M) = \chi_m \frac{\vec{B}(M)}{\mu_o}$

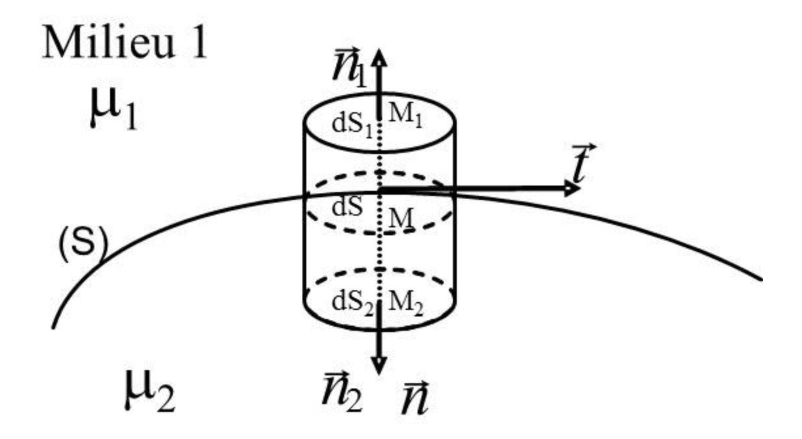
- Si $\chi_m \succ 0$; $\vec{M}$ et $\vec{B}$ sont de même sens, le milieu est paramagnétique (cas de $A\ell$, $F_eC\ell_3$, O_2), χ_m n'excède jamais 3 10^{-3}. $\chi_m < 3\ 10^{-3}$.
- Si $\chi_m \prec 0$; $\vec{M}$ et $\vec{B}$ sont de sens opposés, le milieu est diamagnétique, (cas de Bi, du graphite, de l'eau ;) $-\chi_m$ est inférieur à 2 10^{-4}.

Une catégorie très importante de milieu magnétique est constituée par les milieux ferromagnétiques qui ne sont pas LHI. Il n'existe pas dans de tels milieux de relations simples entre $\vec{B}$ et $\vec{H}$ ou $\vec{B}$ et $\vec{M}$.

III. Relations de passage pour $\vec{B}$ et $\vec{H}$:

III. 1. Composantes normales :

Considérons une surface, séparant deux milieux (1) et (2) de perméabilités magnétiques respectives μ_1 et μ_2.



Dans le milieu (1) : $\vec{B}_1 = B_{1n}\vec{n} + B_{1t}\vec{t}$

dans le milieu (2) : $\vec{B}_2 = B_{2n}\vec{n} + B_{2t}\vec{t}$.

Si on prend comme surface fermée Σ un cylindre de surface de base Sb petite (de sorte que B_{1n} et B_{2n} peuvent être considérés comme constants sur S_{b1} et S_{b2}) et de hauteur infiniment petite (surface latérale infiniment petite) (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface de séparation entre les deux milieux) :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B}d\vec{s} = 0 \Rightarrow \iint_{Sb_1} \vec{B}_1 d\vec{s}_1 + \iint_{Sb_2} \vec{B}_2 d\vec{s}_2 = 0 \;\; (\iint_{S_L} \vec{B}.d\vec{s} \cong 0 \text{ Surface latérale } S_L\text{=0})$$

$$\Rightarrow -B_{1n}S_{b1} + B_{2n}S_{b2} = 0 \Rightarrow B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (\text{car } S_{b1} = S_{b2} = S_b)$$

Il y a donc continuité de la composante normale de $\vec{B}$ à la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux.

Remarque :

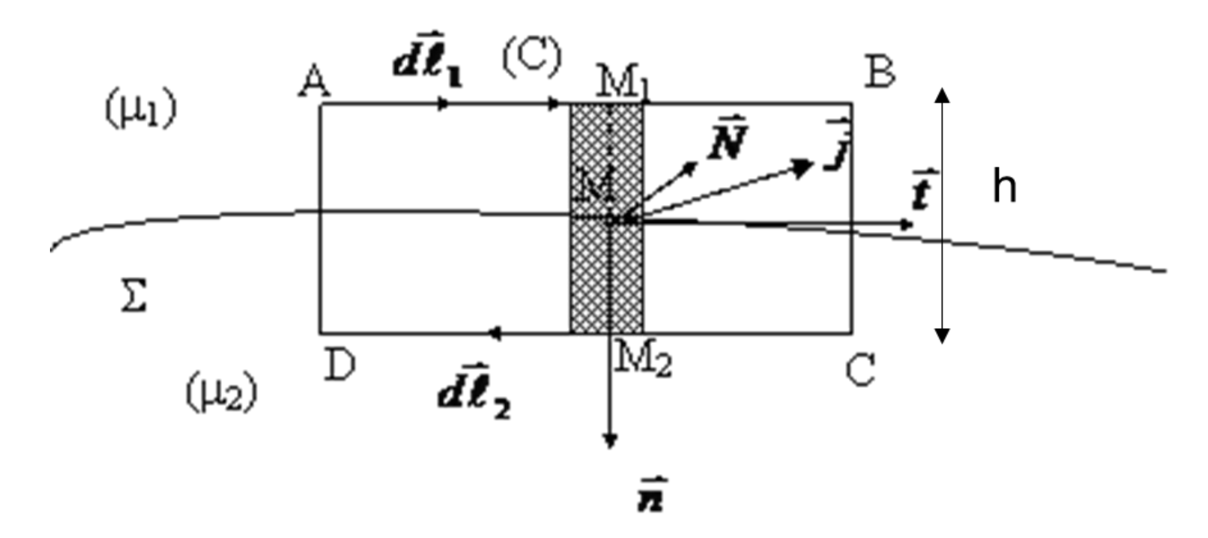
Si les deux milieux sont LHI, alors :

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \Rightarrow \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0$$

La composante normale de $\vec{H}$ est donc discontinue.

III. 2. Composantes tangentielles :

Considérons une surface Σ, parcourue par un courant de conduction densité $\vec{j}$, séparant deux milieux (1) et (2) de perméabilités magnétiques respectives μ_1 et μ_2.



Dans le milieu (1) : $\vec{H}_1 = H_{1n}\vec{n} + H_{1t}\vec{t}$

dans le milieu (2) : $\vec{H}_2 = H_{2n}\vec{n} + H_{2t}\vec{t}$

où $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont deux vecteurs unitaires respectivement normal et tangent à la surface de séparation et $\vec{n}$ est dirigé de (1) vers (2)

$\vec{t}$ et $\vec{j}$ sont dans le plan tangent à Σ.

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \oint_C \vec{H}d\vec{\ell} = \iint_S (\overrightarrow{rot}\vec{H})d\vec{s} = \iint_S \vec{j}d\vec{s} = I$$

où S est une surface quelconque limitée par le contour C (ABCDA)

Le sens de la surface S est lié au sens du contour ABCDA par la règle de tire-bouchon.

$$I = \iint_S \vec{j}d\vec{s} = \iint_S \vec{j}\cdot\vec{N}dS = \iint_S \vec{j}\cdot\vec{N}\cdot h\left|d\vec{\ell}\right|$$

avec : $\vec{N} = \vec{t} \wedge \vec{n}$.

$I = \iint_S \vec{j}\cdot\vec{N}\cdot h\left|d\vec{\ell}\right| \xrightarrow{h\to 0} \int_L \vec{j}_s\cdot\vec{N}\cdot\left|d\vec{\ell}\right|$, $\vec{j}_s$ est la densité surfacique de courant réel

Si on choisit comme contour C un rectangle ABCD de longueur L, parallèle à $\vec{t}$, suffisamment faible (de sorte que $\vec{H}$ soit pratiquement constant sur L) et de largeur ℓ infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface de séparation) on peut donc écrire :

$$\oint_C \vec{H}d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{H}_1 d\vec{\ell}_1 + \int_{CD} \vec{H}_2 d\vec{\ell}_2 = H_{1t}L - H_{2t}L$$

($\int_{BC} \vec{H}d\vec{\ell} = \int_{DA} \vec{H}d\vec{\ell} = 0$ car $BC = DA = \ell \to 0$)

D'autre part : $I=\int_L \vec{j}_s\cdot\vec{N}\cdot\left|d\vec{\ell}\right|=\vec{j}_s\cdot\vec{N}\cdot L$

Donc : $H_{1t}L-H_{2t}L=\vec{j}_s\cdot\vec{N}\cdot L\Rightarrow H_{1t}-H_{2t}=\vec{j}_s\cdot\vec{N}$

Remarques :

- Si $\vec{j}$ et perpendiculaire à $\vec{t}$ alors :

$$H_{1t}-H_{2t}=j_s$$

- Si la surface de séparation n'est parcourue par aucun courant réel, il y a continuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$ à la traversée de cette surface.
- Si les deux milieux sont LHI, alors :

$$H_{1t}-H_{2t}=\frac{B_{1t}}{\mu_1}-\frac{B_{2t}}{\mu_2}=\vec{j}_s\cdot\vec{N}$$

IV. Energie magnétique :

Considérons un volume v d'un milieu magnétique en présence d'un courant réel de densité $\vec{j}$. L'énergie magnétique W de ce système est donnée par :

$$W=\frac{1}{2}\iiint_V \vec{j}\vec{A}dv=\frac{1}{2}\iiint_{espace}\vec{j}\vec{A}dv=\frac{1}{2}\iiint_{espace}(\overrightarrow{rot}\vec{H})\vec{A}dv$$

Or :

$$div\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{B}\overrightarrow{rot}\vec{A}-\vec{A}\overrightarrow{rot}\vec{B}$$

Donc :

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{espace}(\overrightarrow{rot}\vec{H})\vec{A}dv=\frac{1}{2}\iiint_{espace}\vec{H}\overrightarrow{rot}\vec{A}-\frac{1}{2}\iiint_{espace}div(\vec{A}\wedge\vec{H})dv$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_{espace}\vec{H}\vec{B}-\frac{1}{2}\iiint_{espace}div(\vec{A}\wedge\vec{H})dv$$

Or :

$$\iiint_{espace}div(\vec{A}\wedge\vec{H})dv=\oiint_S(\vec{A}\wedge\vec{H})d\vec{s}$$

où S est la surface limitant tous l'espace qui peut être considérée comme une surface sphérique de rayon R infini.

Sur cette surface S, $\vec{A}$ et $\vec{H}$ peuvent être considérés comme étant le potentiel vecteur et l'excitation magnétique créés par un dipôle magnétique. $\vec{A}$ et $\vec{H}$ sont donc en $\frac{1}{R^2}$ et en $\frac{1}{R^3}$ respectivement; ce qui fait que $\vec{A}\wedge\vec{H}$ est en $\frac{1}{R^5}$.

D'autre part :

$$d\vec{s} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r \ .$$

Donc :

$$\iiint_{espace} div(\vec{A} \wedge \vec{B}) dv = \oiint_S (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\vec{s} = \lim_{R \to \infty} \frac{KR^2}{R^5} = 0$$

où K est une constante qui résulte de l'intégration sur θ et φ.

D'où :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{espace} \vec{H}\vec{B} dv = \iiint_{espace} dW \qquad \text{avec : } dW = \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B} dv = \omega \, dv$$

où $\omega = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \vec{H}\vec{B}$ est la densité d'énergie magnétique.

V. Les différents types de milieux magnétiques :

Les milieux magnétiques sont groupés en trois catégories selon leur susceptibilité magnétique χ_m : les milieux diamagnétiques ($\chi_m < 0$), les milieux paramagnétiques ($\chi_m > 0$ mais faible) et les milieux ferromagnétiques ($\chi_m > 0$ et grande).

V. 1. Les milieux diamagnétiques :

Les milieux diamagnétiques sont des matériaux constitués d'atomes qui n'ont pas de moment magnétique intrinsèque (propre). Ils ne comportent pas donc d'électrons célibataires. Le phénomène d'aimantation de ces milieux, en présence d'un champ magnétique extérieur, est appelé diamagnétisme (c'est une aimantation électronique). Sous l'effet d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$, la vitesse des électrons qui gravitent autour du noyau est modifiée. Ils ont tendance à tourner dans le sens direct autour du champ magnétique appliqué. Les moments magnétiques induits sont de sens opposé au champ magnétique appliqué $\vec{B}_e$.

Le champ magnétique induit $\vec{B}_i$ (additionnel) s'oppose au champ $\vec{B}_e$.

Ces milieux sont caractérisés par une faible susceptibilité magnétique χ_m qui est négative ($\chi_m \approx -10^{-5}$).

V. 2. Les milieux paramagnétiques :

Les milieux paramagnétiques sont des matériaux constitués d'atomes (ou de molécules) qui ont un moment magnétique intrinsèque non nul (en absence de champ extérieur). Le phénomène d'aimantation de ces milieux en présence d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$ est appelé paramagnétisme (c'est une aimantation d'orientation : les moments dipolaires atomiques vont s'aligner plus ou moins collectivement suivant $\vec{B}_e$ et contribuer à une aimantation globale $\vec{M} \neq 0$).

Ces milieux sont caractérisés par une susceptibilité magnétique χ_m positive plus grande (en valeur absolue) que celle des milieux diamagnétiques ($\chi_m \approx 10^{-3}$).

Le phénomène d'orientation des moments magnétiques intrinsèques est limité par l'agitation thermique ; ce qui fait que la susceptibilité magnétique des matériaux paramagnétiques est inversement proportionnelle à la température.

Remarque :

Dans les milieux aimantés paramagnétiques, le diamagnétisme existe toujours mais son effet est masqué par le paramagnétisme.

V. 3. Les milieux ferromagnétiques :

Les milieux ferromagnétiques sont des matériaux qui ont des propriétés magnétiques similaires à celles du Fer. Ce sont des matériaux (à base de fer, nickel, cobalt ainsi que de nombreux alliages contenant ces éléments) qui sont capables d'acquérir une aimantation importante dans un champ magnétique extérieur même très faible et de conserver cette aimantation lorsque ce champ est supprimé. Ils sont donc caractérisés par une grande susceptibilité magnétique ($\chi_m \approx 10^{3}$ pour le fer) qui varie avec la température.

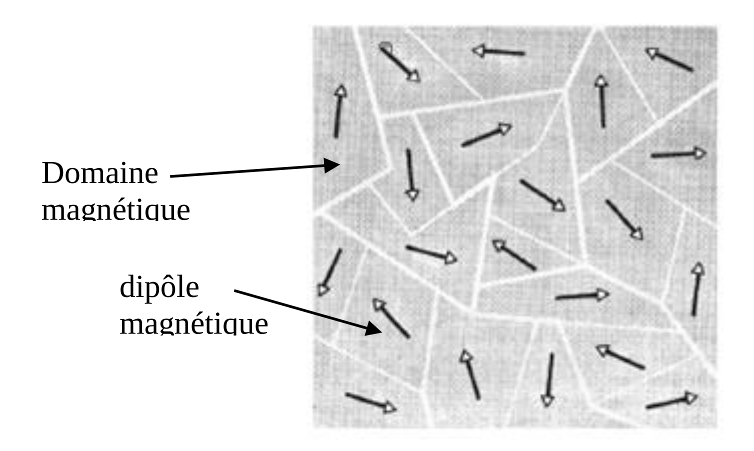
La perméabilité varie avec la température $\mu_r(T)$

Pour des températures élevées, l'agitation thermique entraîne un désordre qui limite l'aimantation du milieu ferromagnétique. Celui-ci peut devenir alors paramagnétique.

La perméabilité dépend de H

M et B ne sont plus simplement proportionnels à H. La dépendance est plus compliqué, mais dépend aussi de l'histoire magnétique du matériau : c'est-à-dire des conditions dans lesquelles il a été aimanté.

Dans ces matériaux, il existe de très fortes interactions entre les moments magnétiques qui s'alignent parallèlement les uns aux autres dans des régions appelées domaines magnétiques.

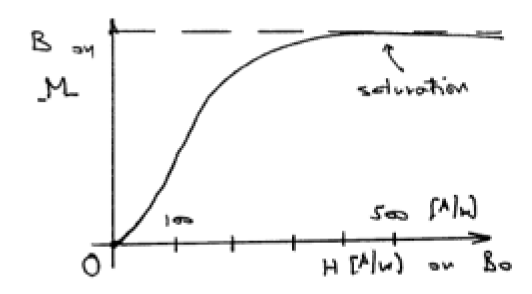


En présence d'un champ extérieur $\vec{B}_e$ même très faible, tous les domaines vont s'aligner les uns sur les autres parallèlement au champ extérieur $\vec{B}_e$ et contribuer à générer une forte aimantation $\vec{M}$

b- Courbe de première aimantation :

Considérons un milieu ferromagnétique qui n'a jamais été aimanté (ou qui a été complètement désaimanté) que l'on place dans une région où le champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$ peut être lentement augmenté à partir de zéro. On appelle courbe de première aimantation la courbe qui traduit la variation de l'aimantation M en fonction de l'excitation magnétique H .

Cette courbe admet une asymptote horizontale qui traduit la saturation de l'aimantation : au delà d'une certaine valeur de H, M ne varie pratiquement plus. La valeur limite M_s est appelé aimantation à saturation. A la saturation, pratiquement tous les domaines magnétiques sont orientés parallèlement à H.



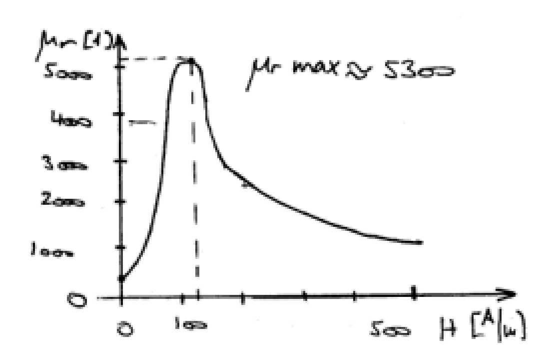
Remarque : on mesure expérimentalement B en fonction de H puis on déduit M en fonction de H

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \Rightarrow M = \frac{B}{\mu_0} - H$$

Compte tenu de l'allure de la courbe de première aimantation, la perméabilité relative $\mu_r = \mu_r(H)$ varie en fonction de H selon une courbe qui a l'allure ci-dessous. La mesure de la pente de la courbe de première aimantation donne donc en chaque point la valeur de la perméabilité relative du matériau.

$$B(H) = \mu_0 \mu_r(H) H$$

Nous pouvons déterminer $\mu_r(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB(H)}{dH}$



c- température de Curie.

Si on élève la température d'un ferromagnétique, on augmente l'agitation thermique des atomes et des molécules et l'on favorise le désordre dans l'orientation des moments dipolaires magnétiques.

C'est pourquoi $\mu_r = \mu_r(T)$ et μ_r diminue lorsque T augmente.

On appelle température de Curie, la température à laquelle μ_r est égale à 1, c'est-à-dire la température à laquelle le ferromagnétisme devient paramagnétique.

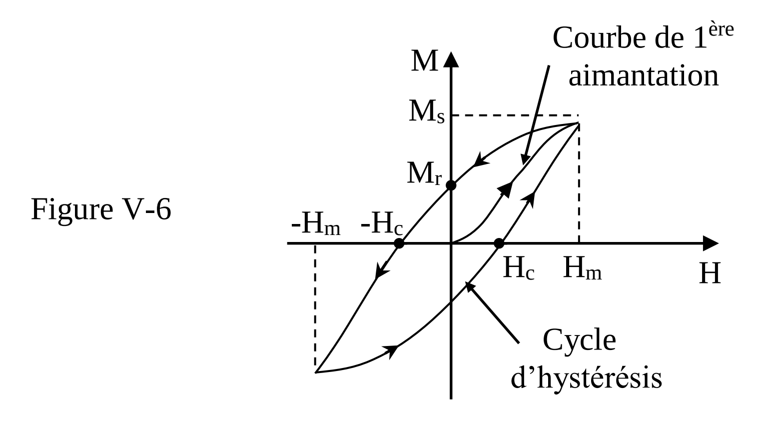
$T_C \approx 770\ ^oC$ pour le fer

V. 4. <u>Cycle d'hystérésis</u> :

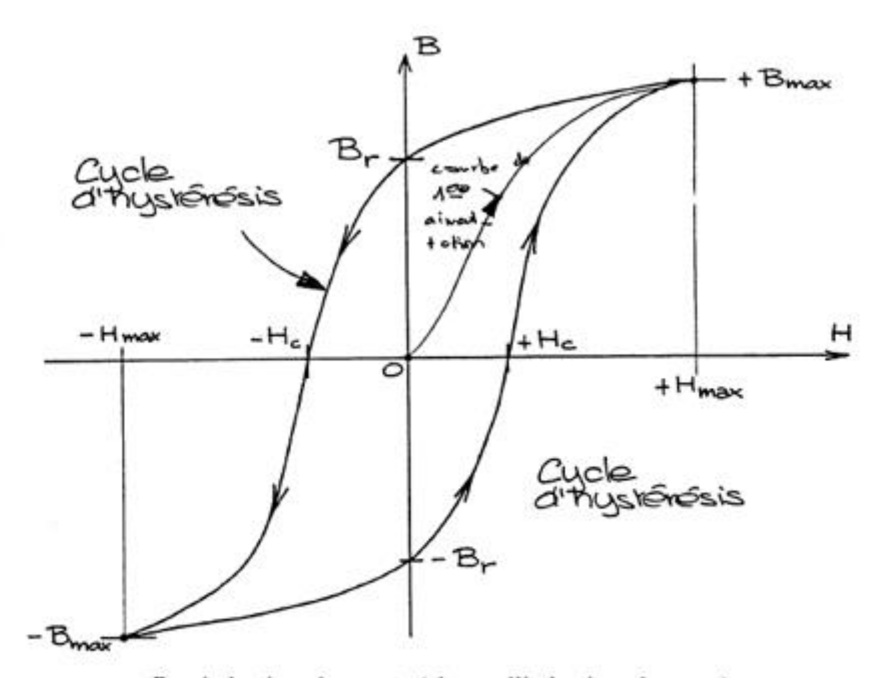
Si on diminue lentement l'intensité du champ extérieur, après avoir atteint la saturation ($H = H_m$), on obtient une nouvelle courbe M(H) qui ne repasse pas par les mêmes points de la courbe de première aimantation. Quand le champ s'annule, le milieu ferromagnétique reste aimanté avec une aimantation M_r dite <u>aimantation rémanente</u>. Pour désaimanter le matériau ferromagnétique (annuler l'aimantation M), il faut appliquer une excitation $-H_c$ (de sens contraire à l'excitation de première aimantation) appelée <u>excitation coercitive</u>.

Si on fait varier H entre H_m et $-H_m$, au bout de quelques allés-retours on obtient un cycle stable (qui a l'allure ci-contre) appelé <u>cycle d'hystérésis</u>. La forme

de ce cycle dépend du matériau ferromagnétique utilisé, de la vitesse de variation de H et de la température.



Cycle B(H)



B_r = induction rémanente (champ d'induction rémanent)

H_c = excitation coercitive (champ magnétique coercitif).

On voit que lorsque $H = 0$: $B_r \neq 0$

V. 5. Pertes d'énergie par hystérésis :

Considérons un barreau de fer placé dans un solénoïde parcouru par un courant d'intensité i variable débité par un générateur de f.e.m e variable.

La loi des mailles, pour ce régime variable, s'écrit alors :

$$e - \frac{d\phi}{dt} - R\,i = 0 \qquad (1)$$

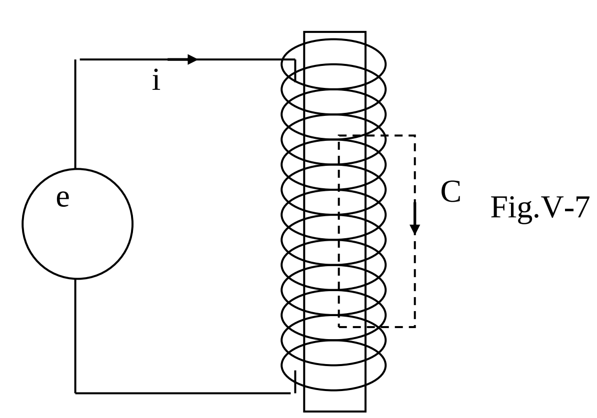


Fig.V-7

où R est la résistance du fil conducteur (du solénoïde) et ϕ est le flux de $\vec{B}$ à travers les surfaces des spires du solénoïde.

Si on multiplie l'équation (1) par *idt* puis on intègre l'équation obtenue, entre l'instant t = 0 (où i = 0, H = 0 et B = B_o) et l'instant t = t_1 (où i = i_1, H = H_1 et B = B_1), on obtient alors :

$$\int_0^{t_1} eidt = \int_{\phi_o}^{\phi_1} id\phi + \int_0^{t_1} Ri^2 dt \qquad (2)$$

Or :

$$\phi = n\ell sB$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur, ℓ est la longueur du solénoïde et s est la surface d'une spire du solénoïde.

Donc :

$$d\phi = n\ell s\ dB \Rightarrow id\phi = ni\ell s\ dB = vnidB$$ (v étant le volume du barreau).

D'autre part, le théorème d'Ampère pour $\vec{H}$ permet d'écrire :

$$\oint_C \vec{H}d\vec{\ell} = nLi \Rightarrow HL = nLi \Rightarrow ni = H$$

où C est le contour fermé rectangulaire, de longueur L, représenté sur la figure V-7.

D'où :

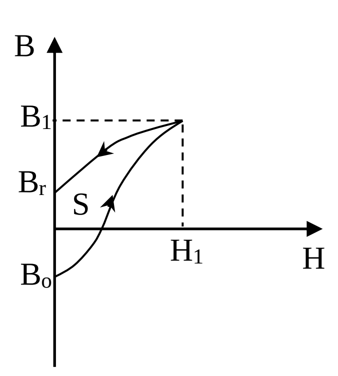
$$id\phi = nivdB = vHdB$$

L'équation (2) s'écrit donc :

$$\int_0^{t_1} eidt = \int_0^{t_1} Ri^2 dt + v\int_{B_o}^{B_1} HdB$$

Le premier terme de cette équation est l'énergie fournie par le générateur pendant le temps t_1, le deuxième terme est l'énergie reçue par la résistance R (perdue par effet joule) et le troisième terme est l'énergie W_1 reçue par le barreau ferromagnétique.

Figure V-8



Si on diminue H de H_1 à zéro, le barreau restitue (fournie) l'énergie W_2 :

$$W_2 = v\int_{B_1}^{B_r} HdB < W_1$$

L'énergie perdue par hystérésis pendant la montée-descente est donc :

$$W_2 + W_1 = vS$$

où S est l'aire comprise entre les deux courbes (montée et descente).

Si on considère un cycle entier (une montée de $-H_1$ à H_1 suivie d'une descente de H_1 à $-H_1$), l'énergie W_c perdue par hystérésis (pendant ce cycle) est donc :

$$W_c = vS_c$$

où S_c est l'aire du cycle d'hystérésis.
Pour réduire les pertes, il faut utiliser des matériaux ferromagnétiques doux dont le cycle est plus étroit.

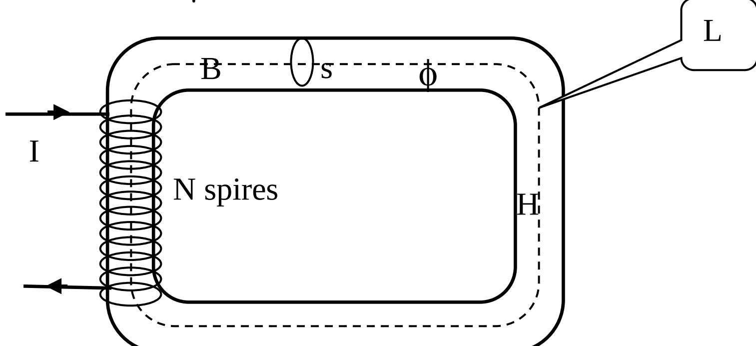
VI. Les circuits magnétiques:

VI. 1. Définitions et propriétés:

- Un électroaimant est un dispositif constitué d'un noyau ferromagnétique dont une partie est recouverte par un bobinage d'un fil électrique. Le passage d'un courant électrique dans ce bobinage entraîne la création d'un champ magnétique dont l'intensité dépend de la forme géométrique et de la nature du noyau et de l'intensité du courant électrique.
- Si le noyau ferromagnétique à la forme d'un circuit alors ce dernier est appelé circuit magnétique. Ce circuit peut être fermé ou ouvert. Dans le cas d'un circuit magnétique ouvert, l'ouverture est appelée entrefer de l'électroaimant.
- Dans un circuit magnétique, les lignes de champ sont canalisées dans le noyau ferromagnétique qui constitue alors un tube de champ.

VI. 2. Notion de réluctance

Considérons un circuit magnétique dont le bobinage est parcouru par un courant d'intensité I. le circuit est composé d'une seule maille.



Puisque le circuit constitue un tube de champ, le flux de $\vec{B}$ à travers la section du noyau ferromagnétique se conserve. Ce flux est donné par :

$$\phi = sB = s\mu H \quad \text{(unité Wb)}$$

où μ est la perméabilité magnétique du noyau ferromagnétique et s sa section.

D'autre part, l'application du théorème d'Ampère pour H, à la ligne moyenne L du tube de champ constitué par le noyau ferromagnétique, permet d'écrire :

$$\int_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_L \frac{B}{\mu} d\ell = \int_L \frac{\phi}{\mu s} d\ell = \phi \int_L \frac{d\ell}{\mu s} = NI$$

où N est le nombre de spires du bobinage du circuit magnétique.

Donc :

$$\phi = \frac{NI}{\int_L \frac{d\ell}{\mu s}} = \frac{U_m}{R} \qquad \text{(Formule d'Hopkinson)}$$

Soit :

$$U_m = NI = R\phi \text{(loi d'Ohm magnétique)}$$

où $R = \int_L \frac{d\ell}{\mu s}$ est appelé <u>réluctance du noyau ferromagnétique</u> (résistance magnétique du circuit) (unité : H^{-1})

$U_m = NI$ est appelée <u>force magnétomotrice</u> (f.m.m.) du circuit magnétique (unité en A).

<u>Remarques :</u>

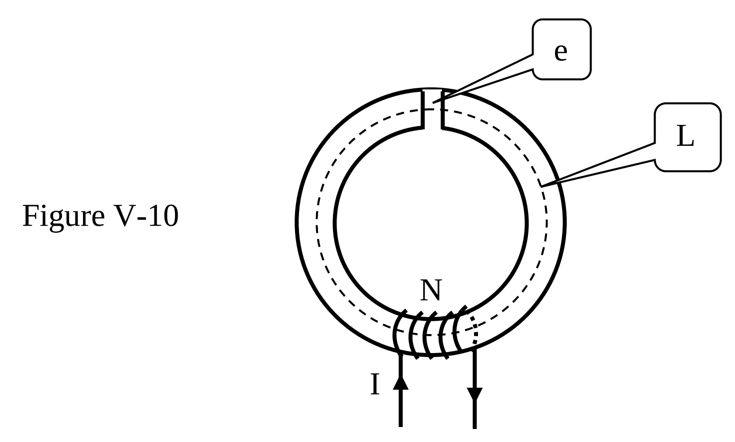
- La relation $U_m = R\phi$ est analogue à la loi d'Ohm, dans un circuit électrique, en électrocinétique. D'où la ressemblance entre les circuits magnétiques et les circuits électriques.

- L'expression de la réluctance du noyau ferromagnétique est la même que celle de la résistance électrique d'un matériau sauf que la conductivité électrique du matériau est remplacée par la perméabilité magnétique.

VI. 3. Exemple :

Considérons l'exemple d'un circuit torique avec entrefer.

Figure V-10

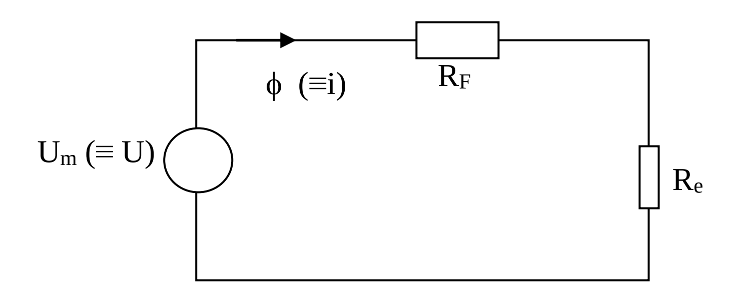


La réluctance totale du circuit est donnée par :

$$R = \int_L \frac{d\ell}{\mu s} = \int_{L-e} \frac{d\ell}{\mu s} + \frac{e}{\mu_0 s} = \frac{L-e}{\mu s} + \frac{e}{\mu_0 s} = R_F + R_e$$

où R_F et R_e sont respectivement les réluctances du noyau ferromagnétique et de l'entrefer.

Ce résultat est analogue à celui de l'association de deux résistances électriques branchées en série en électrocinétique.



$$U_m = NI = R\Phi = (R_F + R_e)\Phi = (\frac{L-e}{\mu s} + \frac{e}{\mu_0 s})\Phi$$

analogie

Electrique	magnétique
U (V)	U_m=NI (A)
R (Ω)	R_m (H^{-1})
i (A)	ϕ (Wb)